Série TD3 : Polynôme à une indéterminée

Exercice 1

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

Déterminer dans $\mathbb{C}[X]$, le reste de la division euclidienne du polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ par

1. $X^2 - 3X + 2$
2. $X^2 + X + 1$
3. $X^2 - 2X + 1$

1) on écrit le polynôme sous la forme

$(x+1)^n - x^n - 1 = (x^2 - 3x + 2)Q + ax + b$

où a, b 2 complexes à déterminer

et $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. d'où

1 et 2 sont les racines du polynôme $x^2 - 3x + 2$

on évalue dans $(*)$ en 1 et 2, on obtient

$$\begin{cases} 2^n - 2 = a + b \\ 3^n - 2^n - 1 = 2a - b \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ b = 3\,2^n - 3^n - 3 \end{cases}$$

donc $R = (3^n - 2^{n+1} + 1)X + 3\,2^n - 3^n - 3$

2) on détermine les racines du polynôme $X^2 + X + 1$

on a $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ donc les racines de $X^2 + X + 1$ sont

$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

on pose $(X+1)^n - X^n - 1 = (X^2 + X + 1)Q + aX + b$ où a, b des nombres complexes à déterminer

on évalue cette relation en j et j^2 on obtient.

$$\begin{cases} (1+j)^n - j^n - 1 = aj + b \\ (1+j)^{2n} - j^{2n} - 1 = aj^2 + b \end{cases}$$

or $1 + j = -j^2$

d'où

$$\begin{cases} (-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = aj + b \\ (-1)^n j^{2n} - j^{2n} - 1 = aj^2 + b \end{cases}$$

si $n \equiv 0\ [3]$, $j^{2n} = j^n = 1$

d'où

$$\begin{cases} (-1)^n - 2 = aj + b \\ (-1)^n - 2 = aj^2 + b \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = (-1)^n - 2 \end{cases}$$

donc $R = (-1)^n - 2$

si $n \equiv 1\ [3]$, $j^n = j$ et $j^{2n} = j^2 = -1 - j$

d'où

$$\begin{cases} (-1)^n - 2 = aj + b \\ (-1)^n - 2 = aj + b \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = (-1)^n - 2 \end{cases}$$

et $R = (-1)^n - 2$

d'où $(-1)^{n+1} - 1)j + ((-1)^{n+1} - 1) = aj + b$

donc $a = (-1)^{n+1} - 1$

$b = (-1)^{n+1} - 1$

et $R = ((-1)^{n+1} - 1)(X + 1)$

Scanné avec CamScanner

si $n \equiv 2[3]$ $j^n = j$

et $j^n = j^2 = -1-j$

d'où $((-1)^n+1)j = aj+b$

d'où $R = ((-1)^n+1)X$.

3) de même on écrit $(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X^2-2X+1) + aX+b$

où a, b des nbres complexes à déterminer

or X^2-2X+1 est un polynôme qui admet 1 comme racine double

on a $((X+1)^n - X^n - 1)' = (Q(X^2-2X+1) + aX+b)'$

donc $n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1} = Q'(X^2-2X+1) + Q(2X-2) + a$

en évalue les 2 relations en 1, on obtient

$$\begin{cases} 2^n - 2 = a+b \\ n2^{n-1} - n = a \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} a = n(2^{n-1}-1) \\ b = 2^n - n(2^{n-1}-1) - 2 = (2-n)2^{n-1} + (n-2) \end{cases}$

par conséquent

$$R = n(2^{n-1}-1)X + (2-n)2^{n-1} + (n-2)$$

Exercice 2

soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$ vaut 1 et que la division euclidienne de P par $(X-b)$ vaut -1 ?

Corrigé

Le reste de la D.E de P par $(X-a)$ vaut 1 donc $\tilde{P}(a) = 1$ et le reste de la D.E de P par $(X-b)$ vaut -1

donc $\tilde{P}(b) = -1$

on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$P = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$

d'où $\tilde{P}(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$.

donc $\begin{cases} \alpha a + \beta = 1 \\ \alpha b + \beta = -1 \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{a-b} \\ \beta = \dfrac{-(a+b)}{a-b} \end{cases}$$

Et le reste de la D.E de P par $(X-a)(X-b)$ vaut $R = \dfrac{2}{a-b}X - \dfrac{(a+b)}{(a-b)}$

Exercice 3

soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Exprimer R en fct de $P(a)$ et $P'(a)$

Corrigé

soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et R le reste de la D.E de P par $(X-a)^2$

on pose $B = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$, donc on a

$B \circ P = (A \circ P) \times$

Scanné avec CamScanner

on pose $P = (X-a)^2 Q + \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

on a $\widetilde{P}(a) = \alpha a + \beta$

et $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2\widetilde{Q} + \alpha$

donc $\widetilde{P}(a) = \alpha a + \beta$ et $\widetilde{P}'(a) = \alpha$

d'où $R = \widetilde{P}'(a)X + \widetilde{P}(a) - \widetilde{P}'(a)a$

Exercice 4

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[Y]$ tq P est non constant.

Mq si $A \circ P$ divise $B \circ P$ alors A divise B

Corrigé

$A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ et P non constant

on pose $B = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$

donc on a $B \circ P = (A \circ P) \times (Q \circ P) + R \circ P$

et $\deg(R \circ P) = \deg(A) \times \deg(P)$

donc $\deg(R \circ P) < \deg(A \circ P)$

Par conséquent $R \circ P$ est le reste de la division euclidienne de $B \circ P$ par $A \circ P$

Comme $A \circ P / B \circ P$ alors $R \circ P = 0$

et ceci n'est possible que si $R = 0$

d'où A/B.

Exercice 5

Démontrer que :

1- $X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$ est divisible par $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$

2- $nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + 1$ est divisible par $(X-1)^2$

1 Premièrement, déterminons les racines de $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$

$\Delta' = \cos^2(\theta) - 1 = (i\sin(\theta))^2$

$x_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$x_2 = \overline{x_1}$,

d'où les racines de $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Pour montrer le résultat, on montre que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont des racines de :

(*) $X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$

Il suffit de le faire juste pour $e^{i\theta}$

Car (*) est un polynôme à coefficients réels (z racine implique que $\bar{z}$ racine)

on a $(e^{i\theta})^{n+1}\cos((n-1)\theta) - (e^{i\theta})^n\cos(n\theta) - e^{i\theta}\cos(\theta) + 1$

$= e^{i(n+1)\theta}\cos((n-1)\theta) - e^{in\theta}\cos(n\theta) - e^{i\theta}\cos(\theta) + 1$

$= \left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right)\cos((n-1)\theta)$

$- \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)\cos n\theta$

$- \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\cos\theta + 1$

$= \left[\cos((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) - \cos(n\theta)\cos(n\theta) - \cos^2(\theta) + 1\right] + i\left[\sin((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) - \sin(n\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)\right]$

et $\cos((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(2n\theta) + \cos(2\theta)\right)$

$\cos(n\theta)\cos(n\theta) = \cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(2n\theta) + 1\right)$

et $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$

Scanné avec CamScanner

donc $\cos((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) - \cos^2(n\theta) - \cos^2(\theta) + 1$

$= \frac{1}{2}\cos(2n\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2}\cos(2n\theta) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2} + 1 = 0$

de même ona

$\sin((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) = \frac{1}{2}(\sin(2n\theta) + \sin(2\theta))$

$\sin(n\theta)\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\sin(2n\theta)$

et $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$

donc $\sin((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) - \sin(n\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)$

$= \frac{1}{2}\sin(2n\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \frac{1}{2}\sin(2n\theta) - \frac{1}{2}\sin(2\theta) = 0$

Conclusion : $e^{i\theta}$ est une racine de $X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$

et par conséquent $e^{-i\theta}$ est aussi racine, donc le polynôme en est est divisible par $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$.

2 - Il suffit de montrer que 1 est racine double

$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$, Pour cela on montre que $\tilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = 0$

Exercice 6

on considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Décomposer P en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

on a $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i)$

donc $P = (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i)$ d'où les racines de P sont les racines troisièmes de -1 ; i et $-i$

→ on cherche $z = e^{i\theta}$ tq $z^3 = e^{3i\theta} = -1$.

càd $z = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ / $k = 0, 1, 2$.

donc les racines cubiques de i sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$; $e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

et les racines cubiques de $-i$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Conclusion : $P = (X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$

$\left(X - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 7

Décomposer en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynomes suivants:

1- X^4+1

2- X^8-1

3- $(X^2-X+1)^2+1$

1) on décompose, en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

Tout d'abord, on décompose dans $\mathbb{C}[X]$

les racines de P sont les racines quatrièmes de -1 sont les nbres complexes: $e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$ où $k\in\{0,1,2,3\}$ càd $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$, et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$

donc $P=X^4+1=(X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{i\frac{5\pi}{4}})(X-e^{i\frac{7\pi}{4}})$

$=(X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{-i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{-i\frac{\pi}{4}})$

$=(X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{-i\frac{\pi}{4}})(X-e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{-i\frac{3\pi}{4}})$

car $e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{7\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}=e^{-i\frac{5\pi}{4}}=e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

or $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=X^2-2\cos(\theta)X+1$

d'où $P=(X^2-2\cos(\frac{\pi}{4})X+1)(X^2-2\cos(\frac{3\pi}{4})X+1)$

$=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$

Ces 2 polynômes n'ont pas de racines réelles donc ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) on a $X^8-1=(X^4-1)(X^4+1)$

$=(X^2-1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$

$=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$

3) $(X^2-X+1)^2+1=(X^2-X+1)^2-i^2$

$=(X^2-X+1)(X^2-X+1+i)=(X^2-i^2-X-i)(X^2-i^2-X+i)$

$=((X-i)(X+i)-(X+i))((X-i)(X+i)-(X-1))=(X+i)(X-1-1)(X-i)(X+i-1)$

Scanné avec CamScanner

$= (X+i)(X-i)(X-(1+i))(X-(1-i)) = (X^2+1)(X^2-2X+2)$.

Exercice 8

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on note $p<n$, U_p la somme des racines de $P^{(p)}$

Démontrer que $U_0, U_1, \dots U_{n-1}$ forme une progression arithmétique et déterminer sa raison.

on pose $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

on sait (vu en : polynômes à une indéterminée) que

$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$ (page 14!) où $\sigma_0 = 1$

et $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = U_0$ (la somme des racines de P)

donc $U_0 = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$.

or $P^{(p)} = a_n n(n-1)\dots(n-p+1) X^{n-p} + a_{n-1}(n-1)\dots(n-p) X^{n-p-1} + \dots + p! a_p$.

En appliquant les relations coefficients-racines à $P^{(p)}$ on obtient $U_p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))} \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(n-p)}{n} \frac{a_{n-1}}{a_n}$

donc $\forall p<n$ $U_p = -\frac{(n-p)}{n} \frac{a_{n-1}}{a_n}$.

et $U_{p+1} - U_p = \frac{-(n-p-1)}{n} \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{(n-p)}{n} \frac{a_{n-1}}{a_n}$.

$= \frac{a_{n-1}}{a_n} \left(\frac{n-p-n+p-1}{n} \right) = \frac{a_{n-1}}{n a_n}$

Exercice 9

1- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on note pour $p<n$, U_p la somme des racines de $P^{(p)}$

Démontrer que $U_0, U_1, \dots U_{n-1}$ forme une progression arithmétique

1- soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$

Déterminer les racines de P sachant que la somme de 2 racines est égale à la troisième.

$\sigma_1 = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}$. càd que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{-(-8)}{1} = 8$

Scanné avec CamScanner

Ce qui donne $\alpha_3 = 4$ et $P = (X-4)Q$. Par la division euclidienne de P par $(x-4)$ on a $Q = x^3 - 4x + 7$.

Or $2+i\sqrt{3}$ et $2-i\sqrt{3}$ sont les racines de Q donc les racines de P sont 4, $2+i\sqrt{3}$ et $2-i\sqrt{3}$.

2- $Q = X^4 + 12X - 5$, on note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q, sachant que $x_1 + x_2 = 2$

a- Déterminer x_1x_2, x_3x_4 et $x_2 + x_4$

on pose $P = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4)$

on a $P = \alpha^4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\alpha^3 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)X^2 - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)X + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

$= S_0X^4 - S_1X^3 + S_2X^2 - S_3X^1 + S_4$

Par identification on a $S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$

$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = 0$

$S_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -12$

$S_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -5$

Or $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ d'où $\alpha_3 + \alpha_4 = -2$

De même on a $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = S_2 = 0$

donc $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = 4$

Par conséquent $\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = 4 \\ (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4) = -5 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 = 5 \\ \alpha_3\alpha_4 = -1 \end{cases}$

car $S_3 = \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2) = -12 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4 = 6$

b- En déduire les valeurs des racines

on a $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ et $\alpha_1\alpha_2 = 5$ donc α_1 et α_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$, d'où x_1, x_2 sont $1 \pm 2i$

Et comme $\alpha_3\alpha_4 = -1$ et $\alpha_3 + \alpha_4 = -2$ alors α_3 et α_4 sont les racines de $X^2 + 2X - 1$ qui sont $-1 \pm \sqrt{2}$

donc $Q = (X + 1 + \sqrt{2})(X + 1 - \sqrt{2})(X - 1 + 2i)(X - 1 - 2i)$

Scanné avec CamScanner

Exercice 10

Déterminer les racines du polynôme $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que les racines sont en progression arithmétique.

On écrit $8x^3 - 12ax^2 - 2a + 3 = 8(X-(a-n))(X-a)(X-(a+n))$

$= 8X^3 - 24aX^2 + \dots - 8a(a-n)(a+n)$

Et par identification on a $24a = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

et $-8 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}+n\right) = 3$ donc $-4\left(\frac{1}{4}-n^2\right) = 3$.

c'est à dire $\frac{1}{4} - n^2 = -\frac{3}{4}$ donc $n^2 = 1$.

on conclut que $n = 1$ ou $n = -1$. Par conséquent les racines sont $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ donc $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 = (2X+1)(2X-1)(2X-3)$

Scanné avec CamScanner